Title	Varieties associated with Kac-Moody vertex algebras and W-algberas [algebras] (Finite Groups, Vertex Operator Algebras and Combinatorics)
Author(s)	荒川, 知幸
Citation	数理解析研究所講究録 (2009), 1656: 13-19
Issue Date	2009-07
URL	http://hdl.handle.net/2433/140878
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第1656巻 2009年 13-19

Varieties associated with Kac-Moody vertex algebras and W-algberas

荒川 知幸 (奈良女子大学理学部)

概 要

我々は退化した主許容表現に付随する Kac-Moody 頂点代数の C_2 多様体を決定する. これにより対応する W 代数の C_2 有限性が従う. 特に最近 Kac-Wakimoto[KW08] によって発見された全ての (non-principal な)exceptional W 代数の C_2 有限性が証明される.

1 Kac-Moody 頂点代数の随伴多様体 (C_2 多様体)

V を $\mathbb{Q}_{\geq 0}$-graded, finitely strongly generated, $V_0 = \mathbb{C}\mathbf{1}$ である頂点代数とし, $C_2(V)$ を $a_{(-2)}b$ $(a, b \in V)$ で張られる部分空間,

$$R(V) = V/C_2(V)$$

とおく. $R(V)$ は自然にポアソン代数になることが知られている ([Zhu96]).

$\{F^pV\}$ を [Li05] で定義された V のフィルター付けとすると,

$$\operatorname{gr} V = \bigoplus_p F^pV/F^{p-1}$$

は頂点ポアソン代数となる. $\operatorname{gr} V$ は $R(V)$ を部分環として含み, 微分環 (differential algebra) として $R(V)$ で生成される. $R(V)$ のポアソン構造も $\operatorname{gr} V$ の頂点ポアソン代数の構造を制限したものに他ならない.

定義 1.1. $R(V)$ が有限次元になるとき, V は C_2 有限であると言う.

命題 1.2. 次は同値.

(i) V は C_2 有限である.

(ii) $\operatorname{gr} V_+$ の任意の元は冪零である. ただし, $\operatorname{gr} V_+ = \bigoplus_{\Delta > 0} (\operatorname{gr} V)_\Delta$.

命題 1.2 から C_2 条件は代数の有限次元性の頂点代数への自然な拡張であることが分かる.

$\{a^1, \dots, a^r\}$ を V の同次な strong generator とすると $R(V)$ は a^i たちの像 $\bar{a}^i$ で生成される:

$$R(V) \cong \mathbb{C}[\bar{a}^1, \dots, \bar{a}^r]/I.$$

I は $R(V)$ の次数付けされたポアソンイデアルである.

$$\mathcal{V}(V) = I \text{ の零点集合} = \operatorname{Specm} R(V)$$

とおき, $\mathcal{V}(V)$ を頂点代数 V の C_2 多様体と呼ぶことにする.

命題 1.3. 次は同値.

(i) V は C_2 有限.

(ii) $\mathcal{V}(V) = \{0\}$. ここで $\{0\}$ は $R(V)$ の *argumentation ideal* に対応する点である.

$\mathfrak{g}$ を複素有限次元単純 Lie 環, $\widehat{\mathfrak{g}}$ を対応する non-twisted な Kac-Moody Lie 環とする:

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K.$$

ただし, K は中心元. 複素数 k に対し, $\mathbb{C}_k$ を $\widehat{\mathfrak{g}}$ の部分 Lie 環 $\mathfrak{g}[t] + \mathbb{C}K$ の $\mathfrak{g}[t]$ が零で, $K = k\,\mathrm{id}$ で作用する一次元表現とする. このとき,

$$V^k = V^k(\mathfrak{g}) = U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\mathfrak{g}[t] \oplus \mathbb{C}K)} \mathbb{C}_k$$

は自然に頂点代数となることが知られている (cf. [Kac98]). この場合, 次が成立する.

$$R(V) \cong \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]. \quad \text{したがって} \quad \mathcal{V}(V) \cong \mathfrak{g}^*.$$

ここで $\mathfrak{g}^*$ のポアソン構造は Kirillov-Kostant のものである.

V_k を V^k の (唯一の) 次数付けされた単純商とすると, $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ の次数付けされたポアソンイデアル I_k が存在し,

$$R(V_k) \cong \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]/I_k$$

となる. V^k, V_k には $\mathfrak{g}$ に対応する随伴群 G が作用するので I_k は G 不変である. したがって $\mathcal{V}(V_k)$ は G 不変, conic な (既約とは限らない)$\mathfrak{g}^*$ の部分代数多様体となる.

次は良く知られている ([DM06]).

命題 1.4. 次は同値.

(i) $\mathcal{V}(V_k) = \{0\}$.

(ii) $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. すなわち, V_k は $\widehat{\mathfrak{g}}$ の可積分表現.

V_k が特に $\widehat{\mathfrak{g}}$ の主許容表現 ([KW89]) の場合を考えよう.

命題 1.5 ([KW89]). 次は同値:

(i) V_k は主許容表現.

(ii) k は主許容数. つまり, $\mathfrak{g}$ の *lacing* 数 $r^\vee$ と素な自然数 q が存在し,

$$k \in \mathcal{P}_q := \{-h^\vee + p/q; p \in \mathbb{N},\ (p,q) = 1,\ p \geq h^\vee\}.$$

h を $\mathfrak{g}$ の Coxeter 数, $k \in \mathcal{P}_q$, $(q, r^\vee) = 1$ とする. $q \geq h$ の時 k は非退化主許容数, $q < h$ の時退化主許容数と呼ばれる.

$\mathcal{N}$ を $\mathfrak{g}(= \mathfrak{g}^*)$ の冪零錘, すなわち冪零元の集合とする.

命題 1.6. k を主許容数とすると, 次は同値

(i) $\mathcal{N} \subset \mathcal{V}(V_k)$

(ii) k は非退化.

定理 1.7. k を退化主許容数, つまり $k \in \mathcal{P}_q$, $q < h$, $(q, r^\vee) = 1$ とすると次が成立する.

$$\mathcal{V}(V_k) = \mathcal{N}_q := \{x \in \mathfrak{g}; (\mathrm{ad}\, x)^{2q} = 0\}.$$

$\mathcal{N}_q$ は既約であることが確かめられる (cf. [oGVAG04]).

Question 1. 一般に, $\mathcal{V}(V)$ が有限個のシンプレルティック葉から成れば $\mathcal{V}(V)$ は既約であるか?

2 W 代数の C_2 有限性

$f \in \mathcal{N}$ に付随するレベル k の W 代数を $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ とする. $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ はある種の BRST コホモロジー $H_f^\bullet(?)$ によって定義される [FF90, KRW03, KW04].:

$$H_f^0(V^k) = \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f).$$

注意 2.1. (i) $f = 0$ の時, $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) = V^k$ である.

(ii) f が主冪零軌道, $k = -h^\vee$ の時, $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ は V^k の中心 $\mathcal{Z}(V^k)$ に同型である ([FF92]).

(iii) $f = \mathfrak{sl}_2$, $f \neq 0$, $k \neq -2$ の時, $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ は中心電荷 $1 - 6(k - \frac{1}{k+2})$ の Virasoro 頂点代数に同型である.

(iv) $\mathfrak{g}$ がスーパー Lie 環の時も $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ は定義される. ほとんど全てのスーパーコンフォーマル代数が極小冪零元 f に付随する W 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ に同型である ([KRW03]).

定義により, 対応

$$M \mapsto H_f(M)$$

は V^k 加群の圏から $W^k(\mathfrak{g}, f)$ 加群の圏への (アプリオルには右完全でも左完全でもない) 関手を定める.

$\mathcal{O}_k$ をレベル k の $\widehat{\mathfrak{g}}$ の BGG 圏とする[1]. $\mathcal{O}_k$ は自然に V^k 加群の圏の充満部分圏となる.

命題 2.2. 任意の $\mathcal{O}_k$ の対象 M について $H_f^i(M) = 0$ $(i > 0)$ が成立する. 従って $H_f^0(?)$ は右完全である.

注意 2.3. (i) $H_f^0(?)$ は一般には完全ではないが, f が極小冪零元の時は例外的に以下が成立する ([Ara05]): 任意の $k \in \mathbb{C}$ について $H_f^{i\neq 0}(M) = 0$ $(M \in \mathcal{O}_k)$ となり, $H_f^0(?)$ は $\mathcal{O}_k$ から $W^k(\mathfrak{g}, f)$ 加群の圏への完全関手を与える. $H_f^0(L(\lambda))$ は零または既約となり, 全ての最高ウエイト既約表現はこのようにして現れる. 特に, Euler-Poincare 原理より $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f)$ の最高ウエイト既約表現の指標は $L(\lambda)$ の指標公式 [KT00] から簡単に従う.

(ii) f が主冪零元の時は任意の $k \in \mathbb{C}$ について以下が成立する ([Ara07]): modified functor $H_{f,-}(?)$ (マイナス還元関手) が存在し $H_{f,-}^{i\neq 0}(M) = 0$ $(M \in \mathcal{O}_k)$ となり, $H_{f,-}^0(?)$ は $\mathcal{O}_k$ から $W^k(\mathfrak{g}, f)$ 加群の圏への完全関手を与える. $H_{f,-}^0(L(\lambda))$ は零または既約となり, 全ての最高ウエイト既約表現はこのようにして現れる. 特に, $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f)$ の最高ウエイト既約表現の指標は $L(\lambda)$ の指標公式 [KT00] から従う.

(iii) f が good even grading を持つときには $\mathfrak{g}$ のパラボリック部分環 $\mathfrak{p}$ が存在し f(の転置は) $\mathfrak{p}$ の Richardson 元なる. このとき, $\mathcal{O}_{k,0}$ を $\mathfrak{p}$ 局所有限な加群のなす $\mathcal{O}_k$ の充満部分圏とすると任意の $k \in \mathbb{C}$ について以下が成立する ([Ara08]): modified functor $H_{f,-}(?)$ が存在し $H_{f,-}^{i\neq 0}(M) = 0$ $(M \in \mathcal{O}_{k,0})$ となり, $H_{f,-}^0(?)$ は $\mathcal{O}_{k,0}$ から $W^k(\mathfrak{g}, f)$ 加群の圏への完全関手を与える. $H_{f,-}^0(L(\lambda))$ は零または almost irreducible となる. 特に A 型の場合は almost irreducible=irreducible となり全ての ordinary な最高ウエイト既約表現はこのようにして現れる.

KL_k を $\mathfrak{g}$ 可積分な表現からなる $\mathcal{O}_k$ の充満部分圏とする.

定理 2.4. 任意の $k \in \mathbb{C}$ と f について以下が成立する.

(i) 任意の KL_k の対象 M について $H_f^{i\neq 0}(M) = 0$.

(ii) $H_f^0(V_k)$ が零または C_2 有限であれば $\mathcal{V}(V_k) \subset \mathcal{N}$.

[1] $\mathcal{O}_k$ の対象は有限性生成とは限らない.

(iii) $\mathcal{V}(\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f)) = \mathcal{V}(V_k) \cap S_f$. 特に, $H_f(V_k) \neq 0 \iff \mathrm{Ad}\, G.f \subset \mathcal{V}(V_k)$.

(iv) 次は同値:

(a) $H_f(V_k)$ が ($\neq 0$ かつ)C_2 有限.

(b) $\mathcal{V}(V_k) \subset \mathcal{N}$ かつ $\overline{\mathrm{Ad}\, G.f}$ は $\mathcal{V}(V_k)$ の既約成分.

注意 2.5. 上の定理は Losev [Los07], Premet [Pre07], Ginzburg [Gin08] によって証明された有限 W 代数に関する Premet の予想と比べられるべきである.

次は定理 2.4(i) の系である.

系 2.6 ([FKW92]). $k \in \mathcal{P}_q$, $(q, r^\vee) = 1$, $q < h$ の時, 主冪零元 f について $H_f(V_k) = 0$.

これと定理 2.4 (ii) を併せると次が従う.

命題 2.7. $k \in \mathcal{P}_q$, $(q, r^\vee) = 1$, $q < h$ の時, $\mathcal{V}(V_k) \subset \mathcal{N}$.

後はどの f に関して $H_f(V_k)$ が零になるかどうかを調べてゆけば定理 1.7 が証明できる.

先に述べたように $\mathcal{N}_q$ は既約だから, ある冪零軌道の閉包となる. つまり

$$\mathcal{N}_q = \overline{\mathrm{Ad}\, G \cdot f_q}$$

となる. 従って定理 2.4(iv) より次が従う.

定理 2.8. $k \in \mathcal{P}_q$, $(q, r^\vee) = 1$, $q < h$ とする時, $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_q)$ の既約商 $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f_q)$ は C_2 有限である.

定理 2.8 により C_2 有限な頂点代数の新しい例が大量に得られたことになる.

$\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f_q)$ はいつ有理的になるかは [KW08, EKV08] によって予想されている. 有理的になるべき $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f_q)$ は exceptional と呼ばれる. 定理 2.8 と [KW08, EKV08] の分類定理を合わせると次が従う.

定理 2.9. 全ての *non-principal* な *exceptional* W 代数は C_2 有限である.

注意 2.10. すべての exceptional W 代数は $W_k(\mathfrak{g}, f_q)$ の形をしているが, A 型以外では逆は必ずしも正しくない. これら exceptional でない C_2 有限な W 代数 (たくさんある!) の構造論・表現論は極めて非自明である.

参考文献

[AM09] Tomoyuki Arakawa and Fyodor Malikov. Algebras of twisted chiral differential operators and affine Lie algebras at the critical level. *preprint*, 2009. arXiv:0903.1281[math.AG].

[Ara05] Tomoyuki Arakawa. Representation theory of superconformal algebras and the Kac-Roan-Wakimoto conjecture. *Duke Math. J.*, Vol. 130, No. 3, pp. 435–478, 2005.

[Ara07] Tomoyuki Arakawa. Representation theory of W-algebras. *Invent. Math.*, Vol. 169, No. 2, pp. 219–320, 2007.

[Ara08] T Arakawa. Representation theory of W-algebras, II: Ramond twisted representations. *preprint*, 2008. arXiv:0802.1564v2 [math.QA].

[DM06] Chongying Dong and Geoffrey Mason. Integrability of C_2-cofinite vertex operator algebras. *Int. Math. Res. Not.*, pp. Art. ID 80468, 15, 2006.

[EKV08] A. G. Elashvili, V.G. Kac, and E. B. Vinberg. On exceptional nilpotents in semisimple lie algebras. *preprint*, 2008. arXiv:0812.1571[math.GR].

[FF90] Boris Feigin and Edward Frenkel. Quantization of the Drinfel'd-Sokolov reduction. *Phys. Lett. B*, Vol. 246, No. 1-2, pp. 75–81, 1990.

[FF92] Boris Feigin and Edward Frenkel. Affine Kac-Moody algebras at the critical level and Gel'fand-Dikiĭ algebras. In *Infinite analysis, Part A, B (Kyoto, 1991)*, Vol. 16 of *Adv. Ser. Math. Phys.*, pp. 197–215. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992.

[FKW92] Edward Frenkel, Victor Kac, and Minoru Wakimoto. Characters and fusion rules for W-algebras via quantized Drinfel'd-Sokolov reduction. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 147, No. 2, pp. 295–328, 1992.

[Gin08] Victor Ginzburg. Harish-Chandra bimodules for quantized Slodowy slices. *preprint*, 2008. arXiv:0807.0339v2 [math.RT].

[Kac98] Victor Kac. *Vertex algebras for beginners*, Vol. 10 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 1998.

[KRW03] Victor Kac, Shi-Shyr Roan, and Minoru Wakimoto. Quantum reduction for affine superalgebras. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 241, No. 2-3, pp. 307–342, 2003.

[KT00] Masaki Kashiwara and Toshiyuki Tanisaki. Characters of irreducible modules with non-critical highest weights over affine Lie algebras. In *Representations and quantizations (Shanghai, 1998)*, pp. 275–296. China High. Educ. Press, Beijing, 2000.

[KW89] V. G. Kac and M. Wakimoto. Classification of modular invariant representations of affine algebras. In *Infinite-dimensional Lie algebras and groups (Luminy-Marseille, 1988)*, Vol. 7 of *Adv. Ser. Math. Phys.*, pp. 138–177. World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1989.

[KW04] Victor G. Kac and Minoru Wakimoto. Quantum reduction and representation theory of superconformal algebras. *Adv. Math.*, Vol. 185, No. 2, pp. 400–458, 2004.

[KW08] Victor G. Kac and Minoru Wakimoto. On rationality of W-algebras. *Transform. Groups*, Vol. 13, No. 3-4, pp. 671–713, 2008.

[Li05] Haisheng Li. Abelianizing vertex algebras. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 259, No. 2, pp. 391–411, 2005.

[Los07] Ivan V. Losev. Quantized symplectic actions and W-algebras. *preprint*, 2007. arXiv:0707.3108v2[math.RT].

[oGVAG04] University of Georgia VIGRE Algebra Group. Varieties of nilpotent elements for simple Lie algebras. I. Good primes. *J. Algebra*, Vol. 280, No. 2, pp. 719–737, 2004. The University of Georgia VIGRE Algebra Group: David J. Benson, Phil Bergonio, Brian D. Boe, Leonard Chastkofsky, Bobbe Cooper, G. Michael Guy, Jo Jang Hyun, Jerome Jungster, Graham Matthews, Nadia Mazza, Daniel K. Nakano and Kenyon J. Platt.

[Pre07] Alexander Premet. Enveloping algebras of Slodowy slices and the Joseph ideal. *J. Eur. Math. Soc.*, Vol. 9, No. 3, pp. 487–543, 2007.

[Zhu96] Yongchang Zhu. Modular invariance of characters of vertex operator algebras. *J. Amer. Math. Soc.*, Vol. 9, No. 1, pp. 237–302, 1996.